Universidad Nacional Autónoma De México

Facultad de Ingeniería

División de Ingeniería Civil Topográfica y Geodésica

Comportamiento de Suelos

Clase del M.I. Gabriel Moreno Pecero

Ocampo Somorrostro Juan Carlos

Objetivo: lograr que el alumno comprenda el comportamiento mecánico de los suelos en cuanto a sus esfuerzos, a sus deformaciones, a su relación (esfuerzo-deformación) y a su variación con el tiempo, con el propósito de que las obras de ingeniería que tienen relación con los suelos sean de calidad, o sea, que resuelvan funciones económicas, seguras y armónicas con la naturaleza en forma simultanea.

Para lograr el objetivo planteado se tendrá el aprendizaje de los siguientes temas:

I. Propiedades hidráulicas de los suelos
II. Distribución de esfuerzos en masa de suelos
III. Consolidación de suelos
IV. Determinación de deformaciones

I. Propiedades hidráulicas de los suelos

Comportamiento de los suelos
- Esfuerzo
- Deformación
- Relación Esfuerzo-Deformación
- Variación con el tiempo

¿Por qué se requiere conocer y aprender este tema?

Esta pregunta se puede plantear la necesidad que debe ser satisfecha por el ingeniero de diseñar una obra civil de tierra como es la cortina de una presa de almacenamiento

Es natural que se tenga en cuenta que a través de la cortina pasará agua, y que debe hacerlo cumpliendo con ciertas condiciones que hagan a la obra de ingeniería el que sea funcional y segura (económica, armónica con la naturaleza). Así surge la necesidad de que la obra, en este caso la cortina, no se deforme al paso del agua; en clase de mecánica del medio continuo se aprendió que existen dos tipos de deformación:

a) Deformación por volumen
b) Deformación por forma
c) La concurrencia de ambas

En el caso del ejemplo se induce mediante el diseño de la obra a que ésta (la cortina) no se deforme por cambio de volumen, y en estas condiciones es necesario que el flujo del agua a través de la cortina sea establecido y consecuentemente el ingeniero debe lograr ello; para la obtención de lo anterior es necesario que conozca la ley que gobierna el flujo del agua a través de un material permeable como es el suelo, en general.

Con el ejemplo anterior no solo se concluye sobre la importancia de que el ingeniero aprenda sobre el flujo de agua en los suelos sino también se concluye que para eso es necesario establecer la ley que gobierna tal flujo.

Un primer paso es encontrar respuesta a la siguiente pregunta ¿Cuáles son los factores que influyen para que el agua se mueva o fluya a través de un medio poroso como el suelo?

Al razonar se concluye que el agua, se mueve por que ocupa una posición (una altura o cota), con respecto a cierto plano, desde luego hay convencimiento que lo antes escrito es cierto pero no se tiene la evidencia de que existiendo en una masa de agua confinada ésta no se mueve por lo que se concluye que falta considerar otro elemento que hace que el agua se mueva. El razonar en clase permitió descubrir que el otro factor que influye para que el agua se mueva es la *diferencia de presiones*. En conclusión el agua se mueve por diferencia de alturas, por diferencia de presiones o por ambas.

Se puede aceptar que el agua se mueve por las dos causas anotadas, por lo que surge, en cada una de las partículas de agua, la necesidad de conocer la altura y la presión, y a su suma se le acostumbra denominar *potencial hidráulico (h)* y se define en una partícula de agua como:

$$h = Z + \frac{P}{\gamma} \qquad \text{ó} \qquad h = Z + \frac{U}{\gamma_w}$$

donde P ó U es la presión en el agua, por lo que $\frac{U}{\gamma_w}$ es la carga de presión.

En un caso especial que se tiene donde en un recipiente que contiene agua y ésta no se mueve se tiene que:

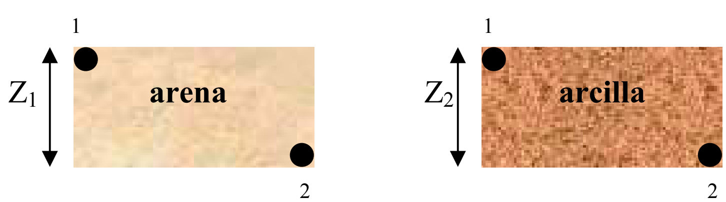
$h_1 =$ potencial hidráulico en 1 $= Z_1 + \frac{\gamma_w h_1}{\gamma_w} = Z_1 + h_1$

$h_2 =$ potencial hidráulico en 2 $= Z_2 + \frac{\gamma_w h_2}{\gamma_w} = Z_2 + h_2$

Puede observarse que el $h_1 = h_2$ y consecuentemente el agua no se mueve, o sea para que el agua se mueve, para que adquiera velocidad es necesario que exista diferencia de potencial hidráulico, o sea:

$$V = f(h_1 - h_2, ...)$$

Existe otro factor que influye en la velocidad del agua a través de un medio poroso como es el suelo, para descubrirlo basta observar lo que ocurre en la naturaleza.



En el dibujo se tienen partículas de agua 1 y 2 con la misma diferencia de presiones y la misma diferencia de alturas o de posiciones, es decir, se tiene en la arena y en la arcilla la misma deferencia de potencial hidráulico, la pregunta es ¿la velocidad con la que fluye el agua a través de la arena tiene la misma magnitud que la velocidad del agua a través de la arcilla?

La respuesta en NO por que los huecos (vacíos) en la arenas son mas grandes que en la arcilla, es decir, hay diferente permeabilidad, y esta puede medirse a través de un índice K y que obviamente se denomina *coeficiente de permeabilidad (k)*.

Por lo tanto: $V = f(\Delta h, k)$

Existe otro factor que influye en la velocidad V que se pone de manifiesto si en las figuras se considera que el agua fluye en diferentes *longitudes de recorrido (L)*.

En resumen:

$$V = f(\Delta h, k, L)$$

y razonando se tiene:

a mayor Δh la velocidad aumenta
a mayor k mayor velocidad
a mayor L menor velocidad

Así se tiene: $V = k \cdot \frac{\Delta h}{L}$

Ley que se acepta que gobierna el flujo de agua a través de un medio poroso como el suelo y es debida a DARCY.

¿Qué es $\frac{\Delta h}{L}$?

Es el *gradiente hidráulico* y se indica con la letra i por que la ley de DARCY queda:

$$V = k \cdot i$$

En lo anterior se ha aceptado una hipótesis que es el considerar flujo laminar (si no se cumple la ecuación no aplica).

En lo que sigue conviene adentrarse en el conocimiento y entendimiento de los factores que aparecen en la ley de Darcy; así se empieza con k que como ya se anoto es el llamado coeficiente de permeabilidad del suelo, y puede intentarse dar una definición de el, anotando que:

k es la velocidad con la que fluye el agua a través del suelo bajo un gradiente hidráulico unitario

$i = \frac{\Delta h}{L}$ $\left[\frac{m}{m}\right]$ adimensional y $\qquad k$ en $\left[\frac{m}{s}\right]$

¿Cuánto vale k ?

Se tienen valores de k determinados mediante tres métodos:

1. Pruebas de laboratorio
2. Pruebas "in situ" o de campo
3. Combinación de 1 y 2

Las pruebas de laboratorio usuales son:

1.1 Mediante el permeámetro de carga constante
1.2 Mediante el permeámetro de carga variable

Las pruebas de campo son:

2.1 Prueba de Thiem
2.2 Prueba de Lugeon
2.3 Prueba de Lefranc

Existen también métodos que en forma indirecta determinan k:

1. Consolidación de suelos
2. Prueba horizontal de capilaridad

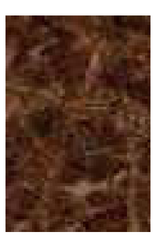
Se pueden consultar los tratados de mecánica de suelos en donde se anotan los valores usuales de k, así se encuentra:

Suelo	k $\left[\frac{m}{s}\right]$
Arena	10^{-4}
Arcilla	10^{-7}

Método de Thiem para obtener el valor del coeficiente de permeabilidad de un suelo, antes de detallar el método resulta conveniente saber responder a la pregunta ¿Cuándo se debe utilizar un método de campo para obtener k?, para dar la respuesta observemos las dos figuras siguientes que representan la estratigrafía en dos sitios

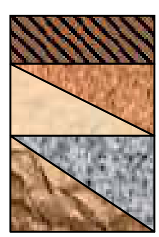
Sitio A

Arcilla



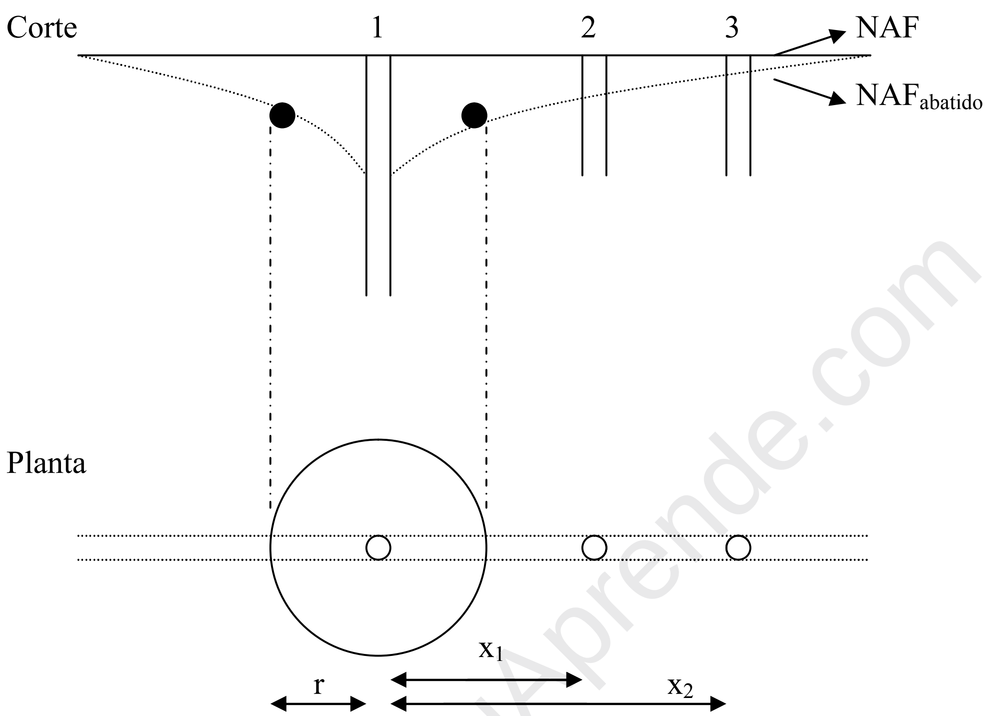
Sitio B

Arena
Arcilla
Limo
Grava
Roca



Se hacen pruebas de campo para obtener k, si la secuencia estatigráfica en el sitio de estudio es heterogénea (Sitio B) y obviamente se hacen pruebas de laboraorio cuando la secuencia estatigráfica es homogénea (Sitio A).

En el método de Thiem se requiere hacer 3 pozos, uno central a través del cual se extrae un gasto Q conocido y dos de observación situados a cierta distancia del pozo central.



Al extraer el gasto Q y suponiendo que tiene una magnitud mayor al gasto que llega al pozo central, se observa que el NAF se abate en la forma indicada en la figura. Se conoce que:

$$Q = VA$$

pero: $V = ki$

por lo tanto:

$$Q = kiA$$

En cuanto al área se reconoce que es aquella a través de la cual ocurre el flujo de agua y corresponde a una superficie cilíndrica de radio r y altura y o sea:

$$A = 2y\pi r$$

En cuanto al gradiente hidráulico se va a aceptar la siguiente hipótesis: El gradiente hidráulico es el que tiene la superficie cilíndrica mencionada en el perímetro de la sección recta superior y el se considera constante en toda la superficie cilíndrica.

El gradiente hidráulico en la orilla del cilindro es:

$$i = \frac{dy}{dL}$$

Hipótesis: se acepta que el gradiente hidráulico en este caso es $\frac{dy}{dL}$, por lo que se obtiene:

$$Q = k\frac{dy}{dL}2\pi ry$$

$$Q\frac{dr}{r} = 2\pi kydy$$

Llegada a la obtención de la ecuación diferencial se requiere integrarla y en estas circunstancias se tiene: $Q = q$

$$\int q\frac{dr}{r} = 2\pi k\int ydy$$

y para obtener la fórmula que permita determinar k se necesita que las integrales sean definidas y así se tiene:

$$\int_{r_1}^{r_2} q\frac{dr}{r} = 2\pi k\int_{y_1}^{y_2} ydy$$

$$q(Ln)_{r_1}^{r_2} = 2\pi k\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y_1}^{y_2}$$

$$q(Lnr_1 - Lnr_2) = 2\pi k\left[\frac{y_2^2 - y_1^2}{2}\right]$$

despejando k

$$\boxed{k = \frac{qLn\frac{r_2}{r_1}}{\pi\left(y_2^2 - y_1^2\right)}}$$

En la obtención de la formula de Thiem se aceptaron hipótesis que es conveniente analizar su impacto en el resultado teórico obtenido, en términos prácticos lo anterior se pude establecer a través de la respuesta a la siguiente pregunta:

¿Al aplicar la fórmula de Thiem el resultado que se obtiene es mayor o es menor que el real?

Para responder se requiere analizar las hipótesis hechas:

Así se hizo la hipótesis de que el NAF se abate al extraer el gasto y ello es debido a que el gasto que se extrae es mayor al que aporta el suelo en el que ocurre el flujo, este hecho termina cuando el NAF ya no se abate por lo que el gasto de extracción iguala al gasto que aporta el suelo, es decir, se pasa de un régimen de flujo variado a flujo establecido. La prueba de Thiem supone que el flujo debe ser establecido, o sea, que las alturas *y* deben medirse cuando el NAF ya no se abate.

Existe también la hipótesis mediante la cual se acepta que el gradiente hidráulico a considerar es el correspondiente a la orilla superior de la superficie cilíndrica a través de la cual se genera el flujo del agua.

En la obtención de la ecuación se considero que el gradiente hidráulico es ${}^{dy}\!/\!{}_{dL}$, es decir, se acepto que $sen\alpha \approx \tan\alpha$ en donde α es el ángulo de inclinación respecto a la horizontal de la superficie libre del agua (NAF) y ello es cierto cuando $\alpha \leq 5^\circ 17' 45''$, este hecho tiene su consecuencia en el trabajo de campo correspondiente a la prueba de Thiem, pues implica que los pozos de observación se deben localizar mas lejos del pozo central.

Surge de inmediato la necesidad de cuantificar lo que se considera lejos y para ello se debe generar una teoría que permita acercarse a determinar la forma y la posición de la curva que representa el NAF abatido; un estudio teórico al respecto es el debido a Kozeny quien con ciertas hipótesis obtuvo que la respuesta al planteamiento hecho es una parábola (parábola de Kozeny). En términos prácticos es conveniente recordar que los pozos de observación conviene localizarlos a una distancia horizontal mayor a la profundidad a que se lleva el pozo central.

La otra hipótesis es suponer que el gradiente hidráulico y aceptado es constante en toda la superficie cilíndrica a través de la cual se tiene el flujo de agua. El análisis de esta hipótesis implica que se esta considerando que la velocidad con la que fluye el agua a través del suelo en promedio es mayor que la real y consecuentemente el gasto teórico va a ser mayor que el real, lo que significa que el coeficiente de permeabilidad que se obtiene es mayor que el real.

PRUEBA LEFRANC

La prueba podrá hacerse a flujo constante, sea por bombeo o por inyección de un gasto constante; o en flujo variable por ascenso o descenso de la superficie del agua dentro de la perforación. En ambos casos es recomendable que la carga de prueba se limite a valores del orden de los 5 a los 10 metros. Como máximo.
Para el primer caso, si se denomina por H la diferencia de carga total correspondiente al gasto Q, la permeabilidad estará dada por:

$$K = C\ (Q/H) \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(1)$$

En donde C es un coeficiente que depende de las dimensiones y forma de la cámara de filtrante, que para efectos de esta prueba se considerará como un elipsoide de revolución con el eje corto igual con D y una distancia focal F.

K en m/seg
C en 1/m = m^{-1}
Q en m^3 / seg
H en metros

Con objeto de comprobar que las dimensiones son normales se harán ensayos con gastos mayores y menores que el de prueba y los valores Q, H se llevarán a una gráfica a escala natural, en donde, si el ensayo es correcto, y el flujo laminar, deberán quedar alineados a lo largo de una recta pasando por el origen.
Cuando el tramo de prueba se encuentre en la cercanía al fondo impermeable o a la superficie del manto freático, al coeficiente C debe hacérsele una corrección mediante el aumento de valor.
Cuando el terreno sea poco permeable, podrá usarse el segundo caso, de flujo variable, cuyos elementos son:

D = diámetro de la tubería en metros
L = longitud de la cámara filtrante en metros.
Ho = distancia del punto medio de la cámara filtrante al manto impermeable
H1 = carga en el instante t1
H2 = carga en el instante t2
A= área efectiva de la sección transversal de la tubería de prueba m^2
(t1 y t2 tiempos correspondientes a H1 y H2)
Para este caso:

$$K = 2.3CA\frac{\log(H_1/H_2)}{T_1 - T_2} \text{--------}(4)$$

C tiene el mismo significado que para el caso 1.

Para el cálculo de K por medio de la fórmula (4) es preciso conocer la posición del nivel estático N. E. Del manto, contada generalmente a partir de la elevación de la boca del tubo.
El caso 2 puede efectuarse arriba del nivel estático del agua, en cuyo caso las cargas H´1 y H´2 se medirán a partir del punto medio de la cámara filtrante, la cual estará a una profundidad Zo, contada a partir de la boca del tubo.

Para valores $\frac{\Delta H}{\Delta t}$ y z en metros, se llevarán en una gráfica que, en principio, deben alinearse a lo largo de una recta, que cortará el eje de las ordenadas (profundidades) en la elevación correspondiente a la del nivel estático del manto freático.

En el caso que la prueba se haga arriba del nivel estático, la recta cortará al eje de las ordenadas, a la elevación media de la cámara filtrante, dicha prueba siempre será bajada.
Condiciones generales que deben que deben satisfacer para que la prueba se considere aceptable:

La relación 1/d debe ser igual o mayor a 5.

El valor l es conveniente también limitarlo a 10 máximo, pero procurando que los valores usuales estén comprendido entre 1.0 y 5.0 metros.
Debe considerarse como no satisfactoria la prueba hecha a través del fondo del tubo solamente debido a la posibilidad de que el material suelto remonte la tubería, falseando los resultados, y a que el valor de k sería en sentido vertical, principalmente.

PRUEBA LEUGEON

Los ensayos Leugeón son análogos a los Lefranc. Lo mismo que estos, se ejecutan según avanza la perforación, se hace en rocas de baja permeabilidad en pequeño volumen; pero más o menos fisuradas, es necesario ejercer presiones relativamente grandes para inyectar el agua en las fisuras. Así pues se calcula la permeabilidad en grande. Supongamos una perforación invadida hasta una cierta profundidad. A partir de ella se perforan unos 5 metros. A continuación se fija un obturador en la parte superior de este tramo virgen y se inyecta agua a presión con una bomba. Un manómetro colocado en la boca del pozo, un contador de agua y una válvula de descarga, permiten medir los caudales inyectados a una presión dada.

En general, se mide durante cinco o diez minutos el caudal inyectando a una presión constante. Después se trabaja con una presión mayor. La gama de presiones a emplear depende del estado de fisuración , pero al menos se emplean tres o cuatro valores que se volverán a utilizar cuando se haya alcanzado la presión máxima. Esta raramente es mayor a 10 kg/cm², ya que existe un límite a causa de la presencia del obturador y de la potencia de las bombas. Por otra parte , se corre el riesgo de producir una facturación artificial y trastornos del terreno que falsearían los resultados.

La comparación de los resultados obtenidos con presiones crecientes y decrecientes es muy instructiva en lo que concierne al comportamiento del terreno. A menudo se comprueba que, cuando las presiones disminuyen, los caudales son mas elevados que cuando aumentan a consecuencia del lavado de las fisuras.

Leugeón preconiza expresar los resultados evaluando la absorción con una presión de 410 kg/cm² en litros por minuto y por metro, con una duración del ensayo de 10 minutos. En su honor se suele denominar Lugeón a esta unidad.

Si se expresa en unidades más consistentes, es decir, calculando el coeficiente de permeabilidad equivalente, se comprueba que un Lugeón vale de 1 a $2x10^{-7}$ m/s..
Esta equivalencia solo tiene valor para un determinado grado de fisuración que justifique un cálculo de este tipo, si los caudales inyectados son pequeños. En efecto, Lugeón considera únicamente las presiones indicadas por el manómetro que se coloca en la superficie. Como las perforaciones y la tubería de conducción del agua son de pequeño diámetro, si los caudales inyectados son grandes y el tramo ensayado es un poco profundo, las pérdidas de carga en la tubería son del mismo orden de magnitud que las presiones medidas en el manómetro.

Para poder evaluar correctamente el coeficiente de permeabilidad de las formaciones que hay que determinar la presión de inyección que existe en el centro de la cavidad. Por consiguiente, hay que tener en cuenta la profundidad del nivel estático del manto acuífero y calcular la pérdida de carga debida a la línea de conducción.

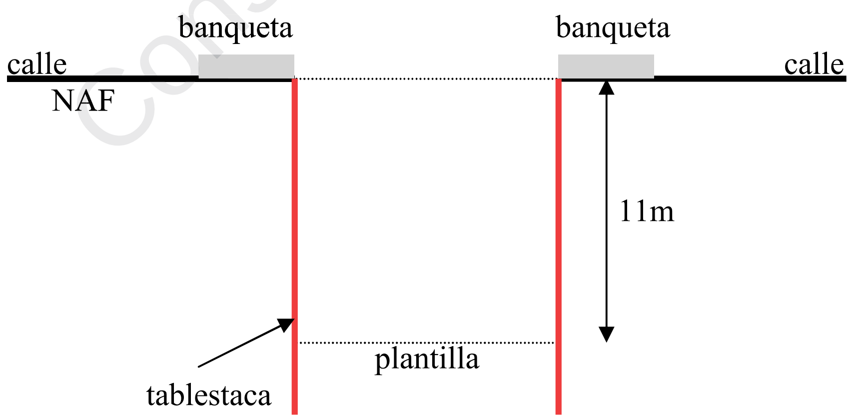
Si no se toma esta precaución, las gráficas del ensayo, expresadas en lugeones brutos, representan casi exclusivamente la ley de variación de las pérdidas de carga en la tubería de conducción. No pueden suministrar ninguna indicación sobre el estado de fisuración de las rocas.

La prueba consiste en inyectar agua a presión en tramos de perforación, lo cual tiene por objeto tener una idea aproximada de la permeabilidad en grande, o sea debida a las fisuras de la roca o del material granular cementado estudiado. Se varía la longitud de los tramos probados, así como la presión a la que se inyecta el agua, La llamada unidad Lugeon corresponde a una absorción de 1 litro de agua por minuto, por metro de sondeo, con una presión de inyección de 10 kg/cm^2.

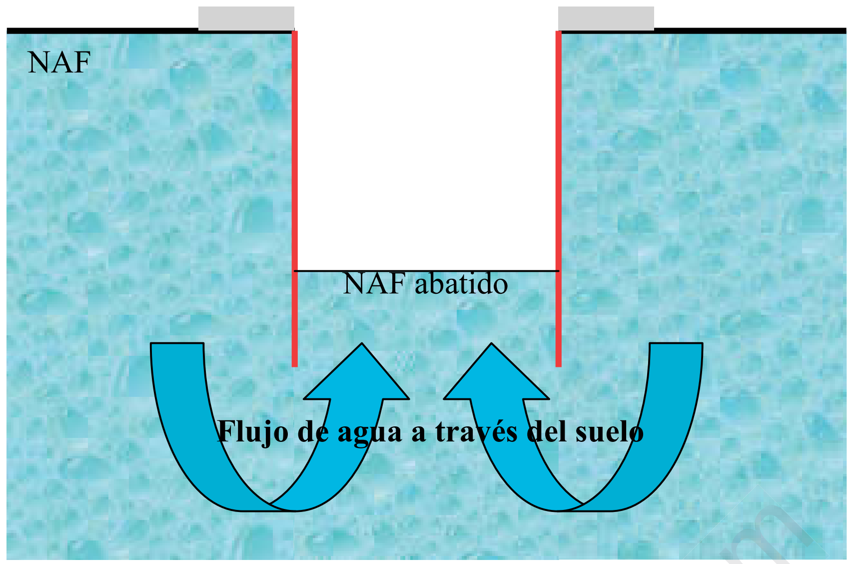
En la práctica, la prueba consiste en obtener, para distintos tramos, curvas de gastos de absorción en función de la presión de inyección.

La longitud de los tramos de perforación en los que se realiza la prueba debe adaptarse a la naturaleza del terreno. En numerosos casos resulta adecuado el empleo de tramos de prueba de longitud reducida (1m o aun menos), con objeto de analizar detalladamente zonas de características excepcionales.

Ejemplo: Con el propósito de entender con claridad el siguiente paso a dar en el aprendizaje de flujo de agua en suelos se plantea una situación ingenieríl que acontece en la práctica. Sea el efectuar en un suelo una excavación de 11m de profundidad en un área de 20x30m, sabiendo que el NAF aparece o coincide con el nivel de la superficie exterior del suelo mencionado. La obra ocurre en una zona urbana. El objeto de la excavación es alojar la cimentación constituida por el cajón de un edificio.

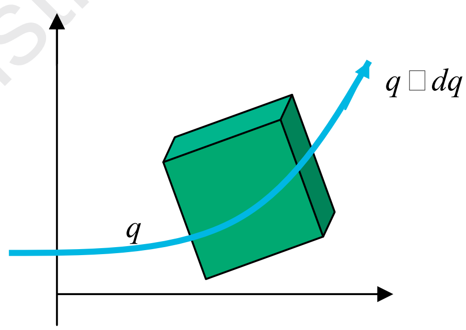


Frecuentemente el ingeniero requiere realizar la excavación en seco, para eso es necesario que abata el NAF en la zona correspondiente a la excavación. Suponiendo que ello se logra y finalmente queda la excavación como se indica en la siguiente figura:



Se entiende que se genera un flujo de agua a través del suelo en que e coloca la tablestaca y que en estas circunstancias es necesario valuar el gasto que llega a la excavación y las presiones en el agua que fluye.

Finalmente en el caso práctico planteado, como ya se anoto se requiere conocer el gasto y presiones y para ello se utilizan las matemáticas en la secuencia que se aprendió en ciencias básicas, es decir, se cuantifica lo que pasa en un elemento diferencial de la masa del suelo sujeta a flujo de agua, el resultado es establecer la ecuación diferencial correspondiente, para inmediatamente después proceder a integrarla entre unos ciertos límites que se fijaran en función de las condiciones de frontera del problema propuesto. Así en la figura se indica un elemento diferencial.



El elemento diferencial se refiere a ejes coordenados en este caso X y Y, ello implica introducir una hipótesis, es decir, se acepta que el problema es bidimensional.

Se propone para establecer la ecuación diferencial el partir de:

Gasto de salida del elemento diferencial	-	Gasto de entrada al elemento diferencial	=	Rapidez del cambio de volumen del elemento diferencial	... 1

La ecuación 1 seria:

$$(q + dq) - q = \textit{rapidez de variación de volumen del elemento diferencial} \quad \ldots 2$$

Obsérvese que aparece la función q y consecuentemente puede escribirse que:

$$q = f(x, y)$$

$$\textit{por lo tanto}$$

$$dq = \frac{\partial q}{\partial x} dx + \frac{\partial q}{\partial y} dy \quad \ldots 3$$

$$\textit{Así del a ecuación 2 y 3 se puede escribir:}$$

$$dq = \textit{rapidez de variación de volumen del elemento diferencial} \quad \ldots 4$$

$$\textit{o sea:}$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} dx + \frac{\partial q}{\partial y} dy = \textit{rapidez de variación del volumen del elemento diferencial}$$

$\frac{\partial q}{\partial x}$ y $\frac{\partial q}{\partial y}$ son respectivamente variaciones de q en dirección del eje X y Y

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} k_x i_x a_x \\ \frac{\partial q}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} k_y i_y a_y \end{aligned}\right\} \ldots 6$$

En donde k_x, i_x, a_x son el coeficiente de permeabilidad en dirección *x*, el gradiente hidráulico en la misma dirección, y el ultimo termino es el área a través de la cual ocurre el flujo en dirección *x*, y en situación análoga pero referida a la dirección *y* se tiene para las oras variables.

Así se tiene:

$$\left.\begin{aligned} a_x &= dy(1) \\ a_y &= dx(1) \end{aligned}\right\} \ldots 7$$

Además i_x, i_y es:

$$\left.\begin{aligned} i_x &= \frac{\partial h}{\partial x} \\ i_y &= \frac{\partial h}{\partial y} \end{aligned}\right\} \ldots 8$$

Llevando lo anotado en 6,7 y 8 a 5; se tiene:

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} dxdy + k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} dxdy = \text{rapidez de variación del volumen del elemento diferencial} \quad ...9$$

La ecuación 9 ha introducido otra hipótesis que es aceptar la ley de Darcy y consecuentemente que el flujo es laminar. Podemos trabajar con la ecuación 9 y escribir:

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{1}{dxdy}\left(\text{rapidez de variación de volumen del elemento diferencial}\right) \quad ...10$$

el segundo miembro de la ecuación 10 no es otra cosa que: *Rapidez de la deformación volumétrica unitaria del elemento diferencial.*

Finalmente se introduce otra hipótesis: se considera que el suelo es un medio homogéneo e isótropo respecto a k, lo que significa que en todo punto y en cualquier dirección se tiene el mismo k.

$$k_x = k_y$$

Por lo tanto:

$$\boxed{k\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right) = \textit{Rapidez de la deformación volumétrica unitaria del elemento diferencial} \quad ...11}$$

Esta ecuación es la correspondiente al flujo de agua a través de un medio poroso como es el suelo para el caso de que este sea variado o no establecido.

Frecuentemente el ingeniero diseña y construye obras para que en principio no se deformen volumetricamente así un ejemplo son las cortinas de materiales graduados de las presas y para ello se requiere que el flujo de agua a través de ellas sea permanente o establecido y la ecuación diferencial 11 se convierte en:

$$k\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right) = 0 \quad ...12$$

pero $k \neq 0$ y consecuentemente la ecuación 12 queda:

$$\boxed{\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right) = 0}$$

Ecuación diferencial de flujo de agua a través de un medio poroso como es el suelo para el caso de flujo permanente o establecido.

Recordando cálculo vectorial se tiene: $\nabla^2 h = 0$

Desde luego el estudio realizado se puede aplicar al caso tridimensional, así se tiene para ello la siguiente ecuación diferencial:

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = \text{rapidez de variación volumétrica del elemento diferencial}$$

Ecuación diferencial de flujo no establecido en un medio tridimensional no homogéneo, no isótropo respecto a k.

Si el medio es isótropo y homogéneo respecto a k se tiene para el caso tridimensional, la ecuación:

$$k\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2}\right) = \text{rapidez de variación volumétrica del elemento diferencia}$$

se considera flujo de agua no establecido

Si el flujo de agua es establecido ($q = cte$) y el medio es homogéneo e isótropo respecto a k la ecuación diferencial tridimensional es:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$$

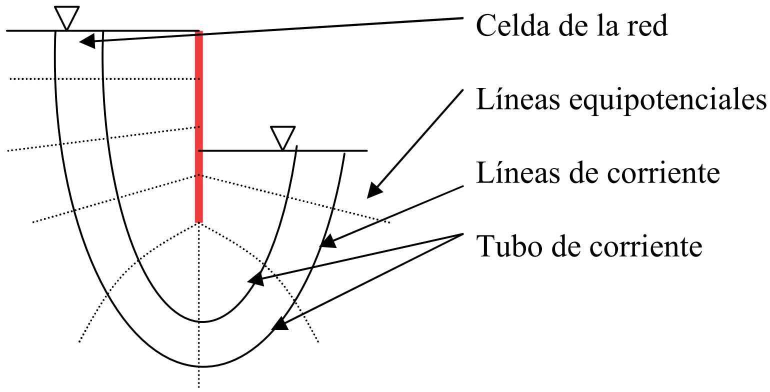
Antes de seguir conviene que el alumno utilice su criterio para determinar en que casos puede utilizar los resultados de la ecuación anterior bidimensional o tridimensional. Para ello se propone el ejemplo de la tablestaca perimetral del área del suelo que se excava. En este caso el flujo es bidimensional en la zona de la tablestaca alejada de las esquinas y obviamente tridimensional en estas. Para el caso de la clase se considera flujo bidimensional y se aceptara que este es establecido; es decir, si nos referimos a la tablestaca se esta aceptando:

a) que el flujo ocurre lejos de las esquinas
b) que no se va a permitir que haya expansión en la plantilla de la excavación

La ecuación a utilizar es:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$$

que implícitamente esta considerando que se cumplen las hipótesis de flujo laminar y medio homogéneo e isótropo respecto a k..



(L.C.) – línea de corriente o de flujo en la trayectoria seguida por las partículas de agua al fluir a través del suelo.
(L.E.) – es aquella que une puntos en donde se tiene el mismo potencial hidráulico (h).
(Tubo de Corriente) – es el espacio comprendido entre líneas de corriente vecinas.
(Red de Flujo) – es el conjunto de líneas de corriente y de líneas equipotenciales.
(Celda de Flujo) – es el espacio comprendido entre dos líneas equipotenciales vecinas y dos líneas de corriente vecinas.

Una vez encontrada la ecuación diferencial, lo que sigue es integrarla y para ello existen diferentes caminos, uno de ellos es emplear métodos numéricos que finalmente permitan la generación de programas de computo para casos especiales, otro método es el gráfico mediante el trazo de redes de flujo; en clase se hará énfasis en este último por que es aplicable a todos los casos reales aun los más complejos; todo ello es para finalmente obtener gastos y presiones.

En el caso del trazo de redes de flujo deben considerarse las siguientes condiciones:

1. Las líneas de corriente no deben intersectarse.
2. Las líneas equipotenciales no deben intersectarse.
3. La intersección de l.c. y l.e. debe ocurrir a 90°.

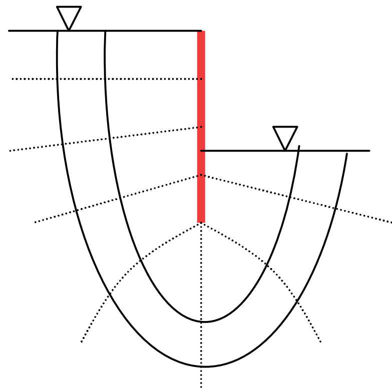
Las razones de lo anterior son: en el caso 1 por que pasaría de flujo laminar a turbulento y en el caso 2 significaría que en el punto de intersección de dos líneas equipotenciales la partícula de agua tendría simultáneamente dos potenciales hidráulicos y se generaría un vórtice y el flujo dejaría de ser laminar.

Para demostrar que la intersección entre una línea de corriente y una equipotencial debe ocurrir a 90° es conveniente recordar:

a) la dirección del vector velocidad de una partícula de agua debe ser en cada punto tangente a la trayectoria, o sea, a la línea de corriente.
b) Para que haya flujo de agua, o sea, para que exista velocidad en el agua es necesario que se tenga una diferencia de potencial hidráulico.

Con base en lo anotado en a y en b se puede demostrar lo solicitado de que si la intersección entre l.c. y l.e. no ocurre a 90° la velocidad tiene proyección sobre la tangente a la línea equipotencial en el punto de intersección y consecuentemente habría flujo de agua a lo largo de la l.c. lo que no puede ocurrir por que todos los potenciales hidráulicos en esa línea son iguales.

A continuación se procede intentar dibujar una red de flujo para el caso particular de la tablestaca indicada en la figura.



Analizando el caso de un tubo de flujo o de corriente se tiene

q_t gasto en un tubo de corriente

$q = VA$

a_n ancho de una celda de la red de flujo

L_n trayectoria promedio del agua en una celda de la red de flujo

$A = 1 \cdot a_n$

$V = k_n \cdot i_n$

Aceptando medio homogéneo e isótropo respecto a k ($k_n = k$) y i_n es el gradiente hidráulico.

$$i_n = \frac{h_n - h_{n-1}}{L_n} = \frac{\Delta h}{L_n}$$

Por lo tanto: $$q_t = 1 \cdot a_n \cdot k \cdot \frac{\Delta h}{L_n} \quad \ldots 1$$

Hay que recordar que pretendemos que el suelo a través del cual ocurre el flujo de agua, *no debe sufrir cambio de velocidad.*

Ello requiere teóricamente que el gasto q_t en todo el tubo de corriente se mantenga constante:

$$\therefore q_t = cte = \frac{k \cdot a_n \cdot \Delta h}{L_n} \quad \ldots 2$$

En la ecuación 2 ya es constante k por la hipótesis hecha, y podemos ahora exigir que Δh sea constante a lo largo de todo el tubo de corriente de referencia. Ello quiere decir que es necesario que en cada celda de la red se tenga la misma diferencia de potencial hidráulico entre las l.e. que limitan la celda.

Finalmente se requiere que a_n / L_n sea igual a una constante.

Puede elegirse para a_n / L_n cualquier valor constante y el criterio de selección pudiera ser dar a esa constante un valor sencillo de manipular, o sea, la unidad (1).

O sea: $a_n = L_n$

Ello significa que las celdas de la red deben ser cuadradas curvilíneas. En estas condiciones el gasto en un tubo de corriente es:

$$q_t = k(\Delta h) \qquad (3)$$

Pero ya se anoto que Δh debe ser constante a lo largo del tubo de corriente y razonando se llega a la conclusión de que en toda red de flujo el Δh es constante; pero si es constante en toda la red el gasto en todo el tubo de corriente es el mismo. Por lo tanto para calcular el gasto en la red de flujo se debe multiplicar el gasto en un tubo de corriente de la red por el número de tubos de corriente que tenga el flujo. (n_t)

$$\therefore \quad Q_t = n_t q_t$$
$$= n_t k \Delta h \qquad (4)$$

Por otra parte Δh es la diferencia de potencial hidráulico entre dos líneas equipotenciales vecinas por lo tanto será:

$$\Delta h = \frac{Potencial\ inicial - Potencial\ final}{Número\ caidas\ de\ potencial} = \frac{h_o - h_f}{n_e}$$

$$\therefore \quad Q = n_t k \frac{h_o - h_f}{n_e}$$

$$Q = \frac{n_t}{n_e} k(h_o - h_f) \qquad (6)$$

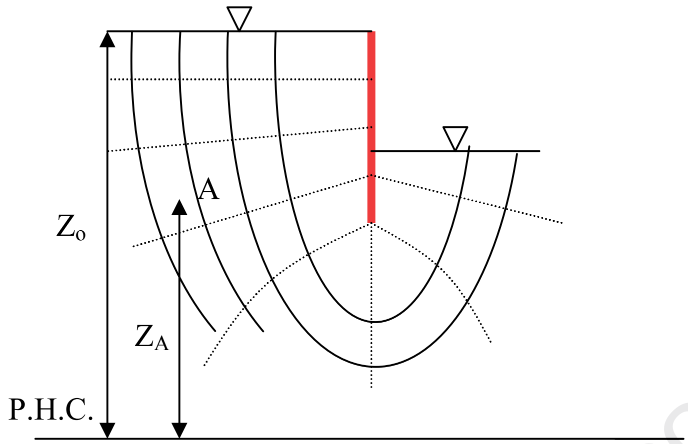
$$Q = \frac{n_t}{n_e} kH \qquad (7)$$

donde H es lo que en hidráulica se denomina carga hidráulica. Puede observarse que si se pretende que no haya cambio de volumen es necesario que n_t / n_e se mantenga constante para un problema dado y s denomina en estas circunstancias *factor de forma* f_f.

Así la ecuación 7 queda: $$Q = f_f kH \qquad (8)$$

Calculo de presiones

Sea determinar la presión en el agua del suelo en un punto cualquiera A de la masa de suelo sujeta al flujo de agua.



Si se recuerda que potencial hidráulico en un punto es la suma de carga de posición mas carga de presión se puede anotar que el potencial hidráulico en el punto A es:

$$h_A = Z_A + \frac{U_A}{\gamma_W} \quad (1)$$

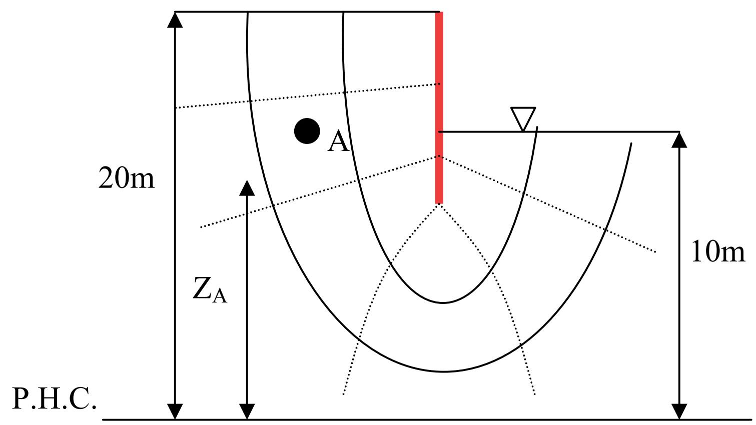
U_A es la presión buscada, por lo tanto se tiene:

$$U_A = (h_A - Z_A)\gamma_w \quad (2)$$

Por otra parte h_A = potencial hidráulico en el punto A = potencial hidráulico en la primera línea equipotencial de la red de flujo – el número de caídas de potencial hasta llegar al punto A multiplicado por Δh donde Δh es la caída de potencial entre líneas equipotenciales vecinas. Lo anterior puede escribirse como:

$$h_A = h_o - n_{e_A} \Delta h \quad (3)$$

Ejemplo:



$$h_A = h_o - \lambda \Delta h$$

$$\lambda = \textit{caida de potencial hasta llegar al punto A}$$

$$\lambda = 1.5 \Delta h$$

$$\Delta h = \frac{20-10}{6} = \frac{10}{6}$$

$$\lambda = 1.5\frac{10}{6}$$

$$h_A = 20 - 1.5\frac{10}{6}$$

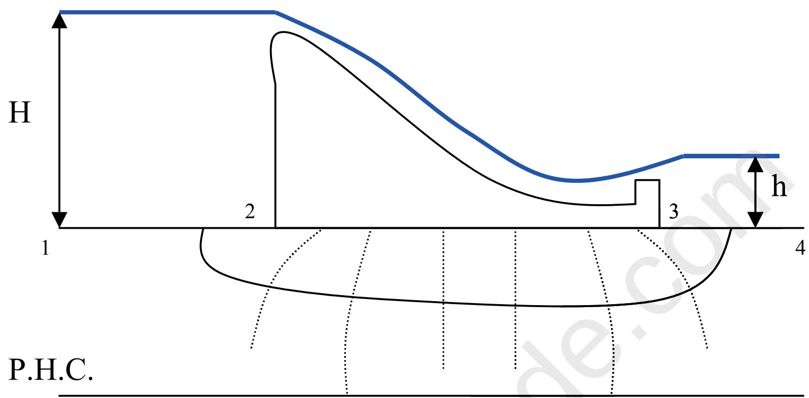
La presión en el punto A es: $U_A = \left(h_o - n_{e_A}\Delta h - Z_A\right)\gamma_w \quad \ldots 1$

Existe un método gráfico para calcular la carga de presión U/γ_w correspondiente a un punto cualquiera de la red de flujo; tal método consta de los siguientes pasos:

1. Se traza la red de flujo
2. Se elige un P.H.C.
3. Aplicar la fórmula 1 en donde:
   h_o - potencial hidráulico de la primer línea equipotencial de la red de flujo
   n_{e_A} - número de caídas de potencial hasta llegar al punto A
   Δh - la caída de potencial entre líneas equipotenciales vecinas, esto es
   $$\Delta h = \frac{h_o - h_f}{n_e}$$
   Z_A - cota del punto A
4. Se divide la distancia vertical entre h_o y h_f en partes iguales cuyo número es n_e y se trazan las rectas horizontales correspondientes a resultado.
5. Se traza una horizontal por el punto en que se requiere conocer la carga de presión.
6. Se traza una horizontal que diste verticalmente de la primer línea equipotencial la distancia $n_{e_A}\Delta h$

7. La distancia vertical entre las 2 líneas horizontales trazadas es la carga de presión buscada.

Existe frecuentemente necesidad de calcular gastos y presiones del agua que fluye a través de un suelo que sirve de apoyo a la sección vertedora (cimacio) de una cortina de una presa y para ello se aplica la teoría y los métodos gráficos hasta ahora aprendidos.



En el dibujo anterior se podrán determinar las condiciones de frontera:

a) la línea 1-2 es línea equipotencial de potencia z_1 □ H
b) la línea 2-3 es línea de corriente
c) la línea 3-4 es línea equipotencial de potencial z_1 □ H

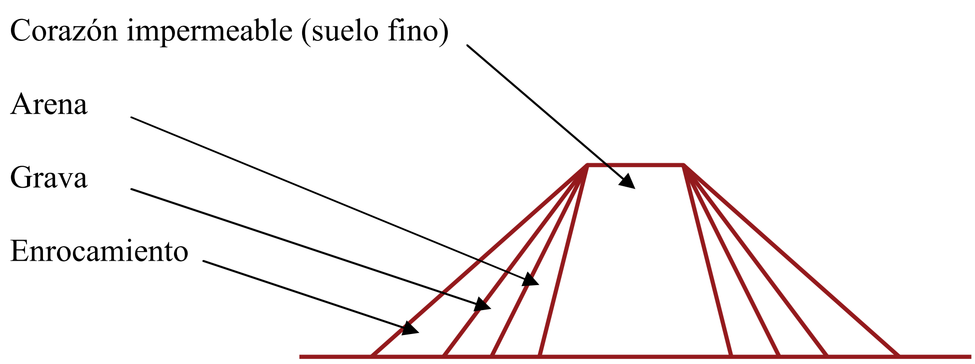
Observemos una situación peculiar; las líneas 1-2, 2-3 y 3-4 son colineales, deberían intersectarse a 90°, este hecho se acepta por que es una condición de frontera, pero seguramente ello genera que en esa zona (donde se intersecan) se tendrá alejamiento del cumplimiento de la teoría.

El trazo de la red de flujo pone de manifiesto que en las zonas próximas a los puntos 2 y 3 no se tienen cuadrados curvilíneos, si no triángulos y ello corrobora que en esa zona no se cumple al teoría. La teoría no se cumple por que en los puntos mencionados la partícula de agua tiene simultáneamente dos direcciones de la velocidad.

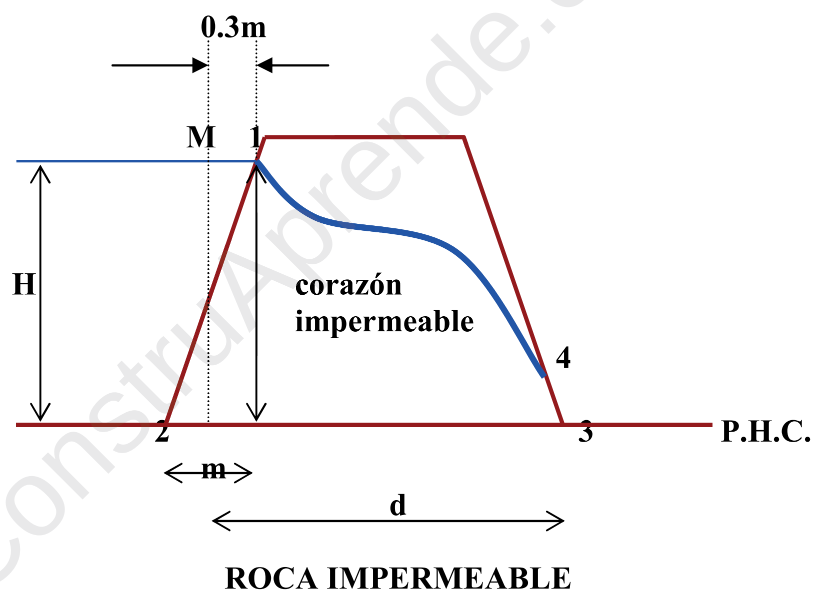
El cálculo correspondiente al diseño del cimacio implica obtener los factores de seguridad contra deslizamientos y frecuentemente habrá necesidad de colocarle dentellones lo que modifica la red de flujo incrementando la longitud de recorrido y consecuentemente la presión, en el agua, en esa zona va a disminuir.

Existe otro caso en donde también es importante aplicar los conocimientos correspondientes a flujo de agua en suelos, que es precisamente el diseño de las cortinas de material graduado de las presas.

Sección de cortina de materiales graduados



El flujo de agua se estudia a través del material que constituye el corazón impermeable de la cortina y como siempre se empieza por determinar las condiciones de frontera



Condiciones de frontera

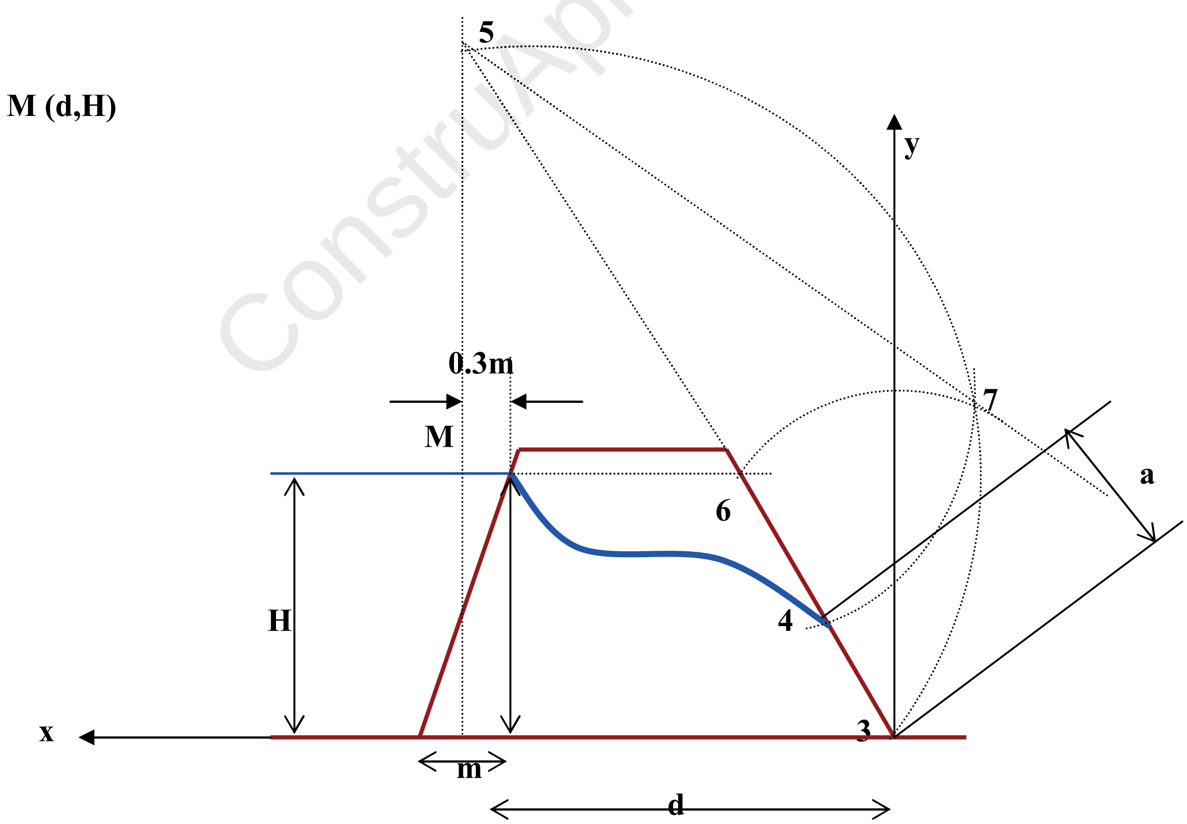
a) línea 1-2 es l.e. de potencial H
b) línea 2-3 es l.c
c) línea 1-4 es l.e. límite superior

En el caso anterior se tiene una diferencia importante respecto a los casos ya aprendidos y es que la posición de la línea 1-4 no se conoce.

Dado lo anotado para la línea 1-4 se tratara de descubrir algunas características de ella que permita ubicarla. En primer lugar se tiene el cumplimiento que a su entrada o inicio debe ser perpendicular a la línea 1-2 debido a que esta última es línea equipotencial y la línea 1-4 es línea de corriente. En segundo lugar se tiene que el potencial hidráulico de cualquiera de los puntos que constituyen la línea 1-4 es directamente su cota respecto a algún plano horizontal de comparación seleccionado, y por otra parte se conoce que la diferencia de potencial entre líneas equipotenciales vecinas de la red de flujo debe ser constante, por lo tanto los puntos de intersección de las líneas equipotenciales de la red de flujo deben equidistar verticalmente.

En cuanto a la posición del punto 4 puede emplearse el criterio de Kozeny que se indica en el siguiente método gráfico:

1. Se prolonga hacia arriba la traza del talud aguas abajo del corazón impermeable de la cortina.
2. Se traza una vertical por el punto M (sobre la superficie libre del agua) cuya abscisa es d, hasta intersecar en el punto 5 a la prolongación dibujada según las indicaciones anotadas en 1. (m es la proyección del talud horizontal mojado).
3. Se prolonga la línea que representa la superficie libre del agua hasta intersecar en 6 a la línea 3-5.
4. Se encuentra el centro de segmento de recta 3-5 y con centro en el se traza la semicircunferencia que tenga por diámetro 3-5.
5. Con centro en 3 y radio 3-6 se traza el segmento de circunferencia hasta intersecar en 7 a la semicircunferencia trazada según lo anotado en 4.
6. Con centro en 5 y radio 5-7 se traza el segmento de circunferencia hasta intersecar el talud aguas abajo del corazón impermeable de la cortina en el punto 4 buscado.



El método anterior se apoya en el planteamiento teórico de Kozeny que encuentra en forma aproximada la ecuación de una parte importante de la línea 1-4; para ello considera un sistema de ejes coordenados XY con origen en el punto 3 y el eje de las abscisas incrementando estas hacia la izquierda.

Con el propósito de determinar la fórmula mediante la cual se obtiene la magnitud de “a”, se utiliza el método gráfico según se indica a continuación:

- La distancia $\overline{36}$ es igual a la distancia $\overline{37}$
- La distancia $\overline{57}$ es igual a la distancia $\overline{54}$
- La distancia “a” o sea $\overline{34}$ es la $\overline{35} - \overline{54}$

Pero $$\overline{35} = \frac{d}{\cos\alpha} \quad (1)$$

además en el triángulo rectángulo 3,5,7 se tiene:

$$\overline{57} = \sqrt{\overline{53}^2 + \overline{37}^2} \quad (2)$$

pero $$\overline{37} = \frac{H}{sen\alpha} \quad (3)$$

sustituyendo 1 y 3 en 2 se tiene

$$\overline{57} = \sqrt{\frac{d^2}{\cos^2\alpha} + \frac{H^2}{sen^2\alpha}} \quad (4)$$

finalmente

$$\boxed{a = \frac{d}{\cos\alpha} - \sqrt{\frac{d^2}{\cos^2\alpha} + \frac{H^2}{sen^2\alpha}} \quad (5)}$$

Con el propósito de demostrar la validez del método gráfico se hará la deducción de la fórmula 5.

Sea la sección recta del corazón impermeable. Sea una sección cualquiera a través de la cual ocurre el flujo de agua, pero para ello se acepta la hipótesis siguiente:

Como sección recta se considera una cuya traza sobre el plano del papel, es una recta, para esto se tiene:

gasto = área x velocidad

El área es: $a = y \cdot 1$ espesor unitario

$v = k \cdot i$

Hipótesis: se acepta Darcy y consecuentemente el flujo debe ser laminar.
Hipótesis: el medio es isótropo y homogéneo respecto a k

Sustituyendo se tiene:

$$q = y \cdot k \cdot i$$

Hipótesis: se considera que *i* es constante (en la realidad la velocidad del agua no es constante ya que *i* no es constante) en toda la sección e igual a su valor en la parte superior de la sección (las velocidades que teóricamente obtengamos serán mayores a las reales).

Hipótesis: se considera que *i* es: $i = \frac{dy}{dx}$ $(\alpha < 30°)$ (ya que en realidad es $i = \frac{dy}{dL}$)

Sustituyendo queda:

$$q = y \cdot k \cdot \frac{dy}{dx} \quad \ldots 1$$

integrando a 1 se tiene:

$$qx = \frac{ky^2}{2} + c \quad \ldots 2$$

Para obtener el valor de c conociendo el valor de x y de y de un punto cualquiera de la línea cuya ecuación es 2, ese punto es M (d,H).

Así se tiene: $q \cdot d = k \cdot \frac{H^2}{2} + c$

Por lo tanto si despejamos a c:

$$c = qd - k\frac{H^2}{2} \quad \ldots 3$$

sustituyendo 3 en 2 se tiene:

$$qx = k\frac{y^2}{2} + qd - k\frac{H^2}{2}$$

o sea: $$0 = \frac{k}{2}\left(y^2 - H^2\right) - q\left(d - x\right) \quad \ldots 4$$

Se requiere hacer aparecer en la ecuación 4 la magnitud "a" y para ello se tiene:

$q = VA$

$Q = K i_4 y_4 \quad 5$

$y_4 = a\,sen\alpha \quad 6$

$i_4 = \tan\alpha \quad 7$

sustituyendo 6 y 7 en 5 se tiene:

$q = ak\tan\alpha\, sen\alpha \quad 8$

sustituyendo 8 en 4

$$0 = \frac{k}{2}\left(y^2 - H^2\right) + ak\tan\alpha\, sen\alpha\left(d - x\right) \quad 9$$

$y_4 = a\,sen\alpha$

$x_4 = a\cos\alpha$

Finalmente se tiene:

$$0 = \frac{k}{2}\left(a^2 sen^2\alpha - H^2\right) + ak\tan\alpha\, sen\alpha\left(d - a\cos\alpha\right) \quad 10$$

multiplicando por k y por 2 a toda la ecuación, y dividiéndola entre $sen^2\alpha$ tenemos:

$$-a^2 + \frac{2ad}{\cos\alpha} - \frac{H^2}{sen^2\alpha} = 0$$

si la vemos como de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ podemos aplicarla la formula general, por lo que el valor de "a" es:

$$\boxed{a = \frac{d}{\cos\alpha} - \sqrt{\frac{d^2}{\cos^2\alpha} - \frac{H^2}{sen^2\alpha}}}$$

La ecuación obtenida es igual a la obtenida por el método gráfico pero se toma la parte negativa de la raíz ya que la parte positiva esta fuera del corazón impermeable.

Hasta ahora se ah considerado flujo de agua en medios homogéneos e isótropos respecto a *k*, en donde la ecuación diferencial para flujo establecido es:

$$\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) = 0$$

pero existen casos en que el flujo establecido ocurre a través de suelo en donde la k tiene un valor distinto según la dirección de la que se trate, en cierta forma existe una $k_x \ y \ k_y$. Para estos casos la ecuación diferencial será:

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$$

resulta conveniente resolver la ecuación diferencial con los mismos lineamientos que se conocen para suelos isótropos y homogéneos respecto a *k*.

Para ello será necesario transformar los ejes coordenados de manera que la ecuación para el medio anisotrópico se transforme en una ecuación para un medio isótropo.

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 h}{\frac{k_y}{k_x} \partial y'^2} = 0$$

$$donde \quad y^2 = \frac{k_y}{k_x} y'^2$$

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_x \frac{\partial^2 h}{\partial y'^2} = 0$$

$$k_x \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y'^2} \right) = 0$$

$$\boxed{\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y'^2} \right) = 0}$$

Sustituyendo en la ecuación siguiente el valor de la y por el correspondiente valor en función de y':

$$dq = k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} dy + k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} dx$$

se obtiene

$$\boxed{dq = \sqrt{k_x k_y}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\,dy + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\,dx\right)}$$ ecuación de gasto diferencial

concluyendo que la permeabilidad que debe utilizarse en la sección transformada en eje xy' es $\sqrt{k_x k_y}$.

Sección transformada $$\boxed{Q = F_f \sqrt{k_x k_y}\,(h_0 - h_f)}$$

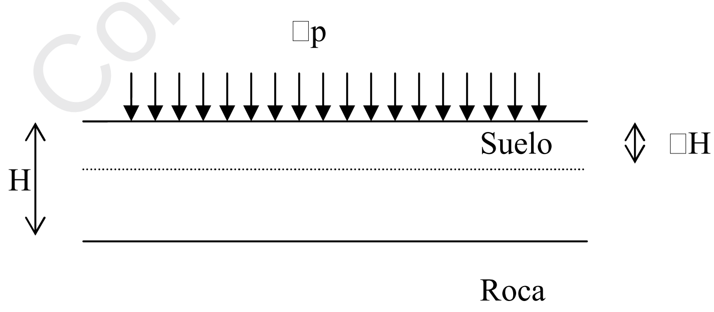
El curso se denomina Comportamiento de los Suelos y tiene que ver con conocer entre otras cosas la deformación de los suelos. En primer lugar se reconoce que existen varios tipos de deformación:

- Por cambio de forma
- Por cambio de volumen

En este curso se aprenderá lo relativo a la deformación por cambio de volumen. En cuanto a la deformación al ingeniero le interesa conocer:

- Su magnitud
- Su rapidez

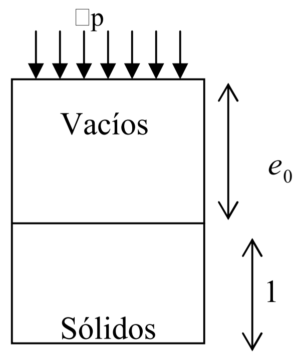
Se tratara ahora de valuar la magnitud de la deformación, para ello se recurre a observar lo que ocurre en la naturaleza:



La acción de la sobrecarga Δp se manifiesta a través de la generación de una deformación vertical (hundimiento o asentamiento) que al cabo de un cierto tiempo alcanza su valor máximo.

Con la observación que se hace con lo que ocurre en la naturaleza se tratara ahora de generar una teoría que permita determinar la magnitud del hundimiento. Para ello se puede recurrir a trabajar sobre un modelo del mecanismo natural.

$$e = \frac{vol.vacíos}{vol.sólidos}$$



e_0 es la relación de vacíos antes de colocar Δp y generar un hundimiento

Consecuentemente:

$$\frac{cambio\ de\ volumen\ en\ la\ naturaleza}{volumen\ original} = \frac{cambio\ de\ volumen\ en\ el\ \mathrm{mod}elo}{volumen\ original\ del\ \mathrm{mod}elo}$$

O sea:

$$\frac{\Delta H \cdot Area}{H \cdot Area} = \frac{\Delta e}{1+e_0}$$

$$\frac{\Delta H}{H} = \frac{\Delta e}{1+e_0}$$

$$\boxed{\therefore \quad \Delta H = \frac{\Delta e}{1+e_0} H}$$

Parece ser conveniente hacer aparecer en la fórmula anterior lo que genero el hundimiento o asentamiento, es decir, Δp, pero a reserva de aprender con mas detalle este aspecto nos referimos a aquel esfuerzo que se genera en los sólidos del suelo que se acostumbra anotar como:

$\Delta\bar{p}$ (esfuerzo efectivo)

Así se tiene:

$$\Delta H = \frac{\frac{\Delta e}{\Delta \bar{p}}}{1+e_0} H \cdot \Delta \bar{p}$$

$\frac{\Delta e}{\Delta \bar{p}} = a_v$ y se le denomina coeficiente de compresión

así se tiene:

$$\Delta H = \frac{a_v}{1+e_0} H \cdot \Delta \bar{p}$$

A la relación de $\frac{a_v}{1+e_0}$ se indica con m_v al que se denomina módulo de compresibilidad del suelo, por ello se tiene:

$$\boxed{\therefore \quad \Delta H = m_v \Delta \bar{p} H}$$

A reserva de detallar los aspectos relacionados con la magnitud del hundimiento, se entrara ahora a un planteamiento inicial para tomar en cuenta la rapidez del hundimiento. Evidentemente la rapidez implica introducir el factor tiempo.

Y para lograr lo antes anotado se hará uso de las ideas que revolucionaron la mecánica de suelos generando la nueva concepción de ella.

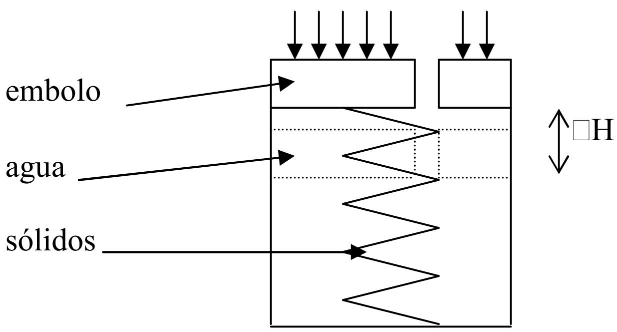
Hace años (por los 30 del siglo pasado) un joven profesional de la ingeniería se propuso la meta de encontrar una ley que gobernase el comportamiento mecánico del suelo. Para ello hizo lo que debe tenerse siempre como mecanismo creador:
Pensó; se trata del que se reconoce como el padre de la mecánica de suelo moderna:

Karl Terzaghi

Un paso mas dio Terzaghi que consiste en observarla naturaleza y así se tiene que un suelo sometido a una sobrecarga Δp experimenta al paso del tiempo un hundimiento.

Hipótesis: se tiene un suelo saturado

Modelo reológico:



Tiempo	Lo que toma el suelo	Lo que toma el agua	Lo que toma los sólidos	Hundimiento
$t_0 = 0$	Δp	$u = \Delta p$	$\Delta \bar{p} = 0$	$\Delta H = 0$
$t_0 < t > t_f$	Δp	u	$\Delta \bar{p}$	ΔH_t
$t = t_f$	Δp	$u = 0$	$\Delta \bar{p} = \Delta p$	$\Delta H_f = \Delta H_t$

$$\boxed{\Delta p = u + \Delta \bar{p}}$$

en todo tiempo

Ecuación Fundamental de los Suelos Saturados

Donde:

Δp – esfuerzo total
u – presión de poro ó presión neutra
$\Delta \bar{p}$ - esfuerzo efectivo

Retomando la ecuación: $\Delta H = m_v \Delta \bar{p} H$

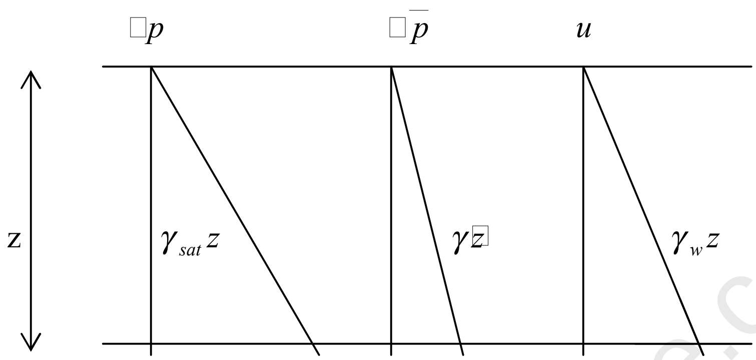
Al hacer un razonamiento sobre el significado de H se encuentra que es:

El espesor deformable del estrato deformable

Para determinar el valor de H se propone generar una teoría que permita conocer como se va distribuyendo el esfuerzo que hace aparecer en el suelo la presencia de del Δp que se entiende va disminuyendo con la profundidad. En términos teóricos se requiere conocer como responde el suelo debido a la aparición de esfuerzos en él, la respuesta es sencilla de dar, responde deformándose por lo que se requiere conocer la relación esfuerzo-deformación, al respecto se hace la hipótesis:

Se considera que el suelo es un medio homogéneo e isótropo respecto a la relación esfuerzo-deformación y que ésta es constante y consecuentemente en medio se considera Elástico Lineal.

Para poder explicar el hecho del hundimiento regional supóngase que el NAF coincide con el nivel de la superficie exterior del terreno.

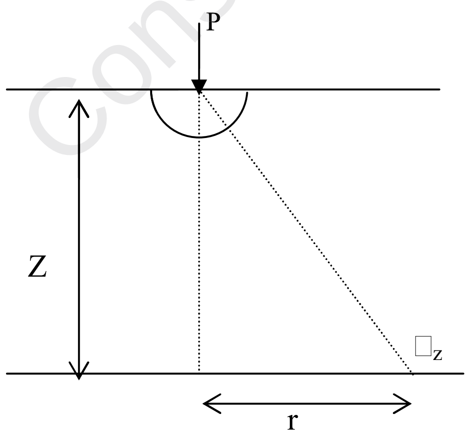


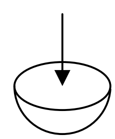
$\gamma' = $ *peso volumetrico sumergido*

$$\Delta \bar{p} = \Delta p - u$$

$$\gamma_{sat} z - \gamma_w z = \gamma' z$$

Los primeros intentos teóricos fueron hechos por Boussinesq y se ejemplifican con el caso particular de una carga P puntual apoyada en un medio elástico lineal.





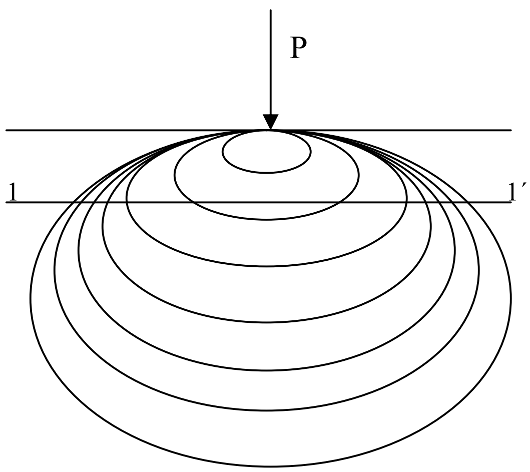
$$\sigma_z = \frac{3P}{2\pi} \frac{z^3}{\left(r^2 + z^2\right)^{5/2}}$$

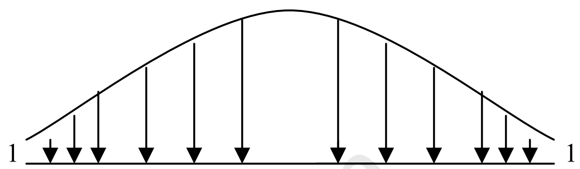
referencia: Elasticidad Lineal
Timoshenko

Puede observarse que si $z \to 0$ y $r \to 0$, esto implica que $\sigma \to \infty$

Pero tal esfuerzo no puede ser resistido sin fallar por el suelo en el que se ejerce y por ello Boussinesq indico que su teoría no es valida para puntos situados en la proximidad del punto de aplicación de P y esto lo hace rodear tal punto por un entorno.

La utilización de los resultados teóricos de Boussinesq permite encontrar aquellos puntos del medio en los que σ_z es el mismo, uniendo todos esos puntos se encuentran las llamadas *isobaras* que tienen una forma como se muestra en la figura:



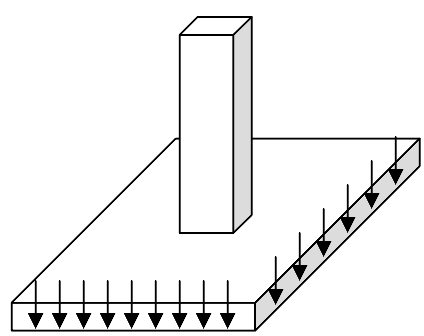


Variación de σ_z en el plano horizontal

En la ecuación $$\frac{\sigma_z}{\Delta p} = \frac{3P}{2\pi} \frac{z^3}{\left(r^2 + z^2\right)^{5/2}}$$

$\frac{\sigma_z}{\Delta p}$ - es un número adimensional tal que al multiplicarlo por Δp determina el esfuerzo normal vertical σ_z en un punto medio. Se denomina *Coeficiente de Influencia* y se indica con I_z ó I_σ.

Frecuentemente en la práctica ingenieríl se tienen sobrecargas Δp mediante los elementos de cimentación que se apoyan en el suelo:



Por ello es conveniente conocer de soluciones de distribución de esfuerzos en una masa de suelo generados por la presencia de una sobrecarga.

Una forma de lograr lo antes anotado es apoyarse en los resultados de Boussinesq para el caso de carga puntual, lo que significa integrar los resultados, esto ha sido realizado por diferentes investigadores, uno de ellos es *Fadum*, cuyos resultados se pueden conocer en el libro de Juárez Badillo, otro es *Steinbrenner* en el libro Mecánica de Suelos de Tschebotarioff.

El resultado obtenido es:

$$\sigma_z = \frac{\Delta p}{2\pi}\left[ang\tan\left[\frac{b}{2}\,\frac{a\left(a^2+b^2\right)-2az\left(R-z\right)}{\left(a^2+b^2\right)\left(R-z\right)-z\left(R-z\right)^2}\right]+\frac{bz}{b^2+z^2}\,\frac{a\left(R^2+z^2\right)}{\left(a^2+z^2\right)R}\right]$$

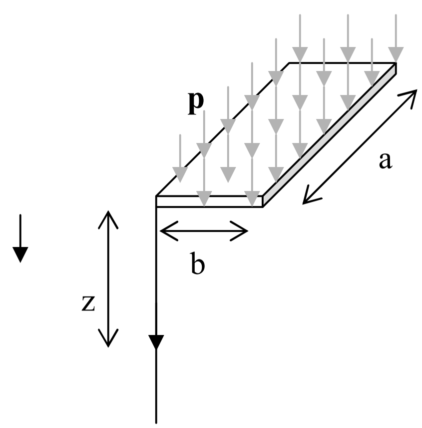
donde:

$$R=\sqrt{a^2+b^2+z^2}$$

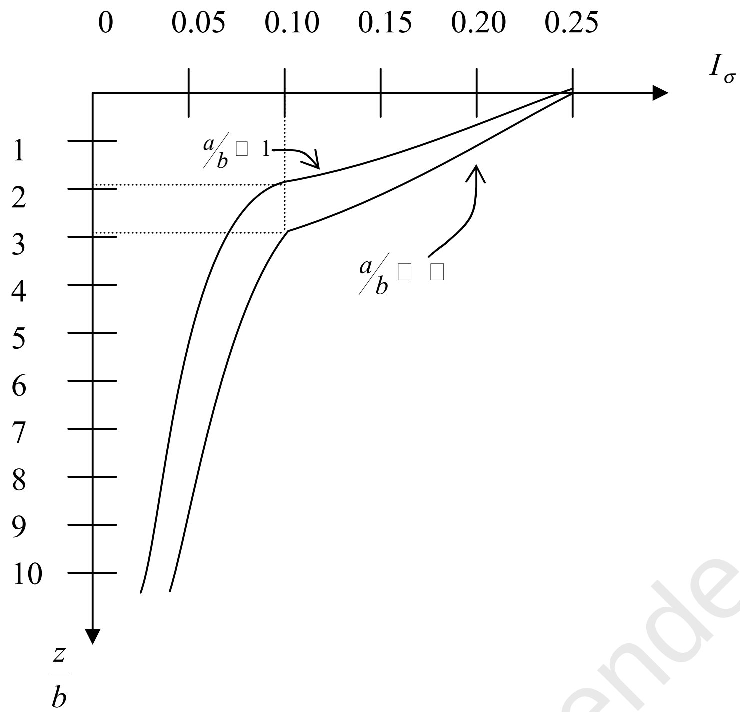
El resultado se tiene parra el caso de una sobrecarga Δp, uniformemente distribuida en un área rectangular de ancho *b* y largo *a*, medidos los esfuerzos σ_z a lo largo de la vertical que pase por cualquiera de las cuatro esquinas del área rectangular mencionada.

Observando la ecuación se tiene:

$$\frac{\sigma_z}{\Delta p}=f\left(\frac{a}{b}\ ,\ z\right)$$



Así el resultado anterior se puede representar gráficamente



Observaciones:

1. En la práctica profesional se necesita determinar la profundidad a la cual el esfuerzo □$_z$ llega a ser despreciable (que no influya en el hundimiento) y en México se acepta que eso ocurre cuando I_σ □0.10
2. Para una zapata cuadrada la profundidad z a la cual I_σ □0.10 resulta ser de *2b*, o sea , 2 veces el ancho del área cargada uniformemente con □p .
3. Para una zapata larga (corrida) en donde el largo *a* es bastante mayor al ancho *b* la profundidad *z* a la cual el I_σ □0.10 es de *3b*.
4. Al observarse que todas las curvas de la gráfica concurren en I_σ □0.25 para $\frac{z}{b}$ □0 se concluye que en cualquiera de las cuatro esquinas del área cargada con □p para z □0 el σ_z que aparece es una cuarta parte de la sobre carga □p, para cualquier área rectangular o cuadrada. En cambio al centro de cualquier área rectangular o cuadrada uniformemente cargada con □p, para z □0, el esfuerzo σ_z □□p, es decir, I_σ □1

Aceptando lo anterior puede concluirse que para una cimentación flexible que genera un □p uniforme en el área rectangular en que se apoya el cimiento el hundimiento es máximo al centro del área cargada y mínimo en las esquinas.

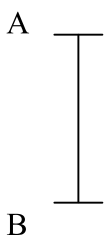
Distribución de esfuerzos en un suelo sujeto a carga

Natham W. Newmark se planteo el caso de una sobre carga Δp uniformemente distribuida en un área circular de radio r y obtuvo la expresión que determina el esfuerzo σz que se genera en el medio en que se aplica Δp a una profundidad z.

La ecuación es:
$$\frac{\sigma z}{\Delta p} = I_{\sigma} = 1 - \left[\frac{1}{1+\left(r/z\right)^{2}}\right]^{3/2}$$

Se observa que:
$$I_{\sigma} = f\left(\frac{r}{z}\right)$$

Si en la ecuación se le da un cierto valor a z éste se puede representar por un segmento de recta $\overline{AB}$ seleccionado en una escala de líneas.



Si este valor ($\overline{AB}$) se lleva a al ecuación de Newmark y se calcula la relación $\left(r/\overline{AB}\right)$ correspondiente a un cierto coeficiente de influencia, por ejemplo 0.8 se encuentra:

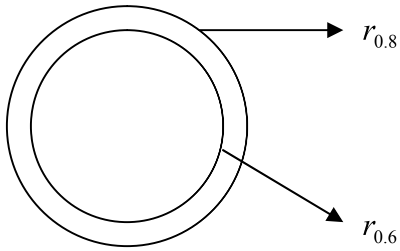
$$\frac{\sigma_z}{\Delta p} = 0.8 \quad \Rightarrow \quad \frac{r}{\overline{AB}} = 1.387 \quad \Rightarrow \quad r_{0.8} = 1.387\overline{AB}$$

$r_{0.8}$ ⇒ es el radio del circulo que cargado con Δp genera un esfuerzo $\sigma_z = 0.8\Delta p$, a una profundidad z representada a una cierta escala de líneas por el segmento de recta $\overline{AB}$.

La escala se calcula:
$$Escala = \frac{magnitud\ real}{magnitud\ representada}$$

Así es posible dibujar el circulo que cargado con Δp genera a la profundidad $\overline{AB}$ el esfuerzo $\sigma_z = 0.8\Delta p$.

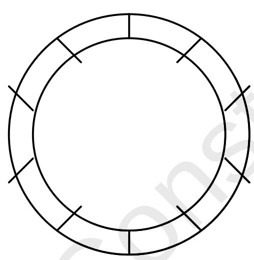
Repitiendo el proceso anterior para $\frac{\sigma_z}{\Delta p} = 0.6$ se obtiene $r_{0.6}$ para la misma profundidad $\overline{AB}$ dibujando el circulo correspondiente que resulta ser menor al anterior tal como se indica en la figura



Si ahora se carga con Δp exclusivamente la corona circular determinada por $r_{0.8}$ y $r_{0.6}$ el esfuerzo σ_z a la profundidad $\overline{AB}$ será:

$$\sigma_z = 0.8\Delta p - 0.6\Delta p$$

Si ahora se divide en 10 partes iguales la corona circular mencionada y se carga con Δp una sola de las celdas, el esfuerzo σ_z a la profundidad $\overline{AB}$ será:



$$\sigma_z = 0.2\Delta p$$

Con este proceso se construye el nomograma de Newmark que como ya se comento ahora se tiene programas de computación para esto.

Para obtener el bulbo de presiones utilizando el nomograma o carta de Newmark se procede como se indica a continuación:

1. Se selecciona la profundidad a la cual se quiere conocer σ_z aplicado en un punto de la masa de suelo, medida en la profundidad en la vertical que pasa por el punto mencionado.
2. Se dibuja la planta del cimiento en un papel transparente a una escala en donde $\overline{AB}$ de la carta de Newmark represente la profundidad z a la que se quiere conocer σ_z.

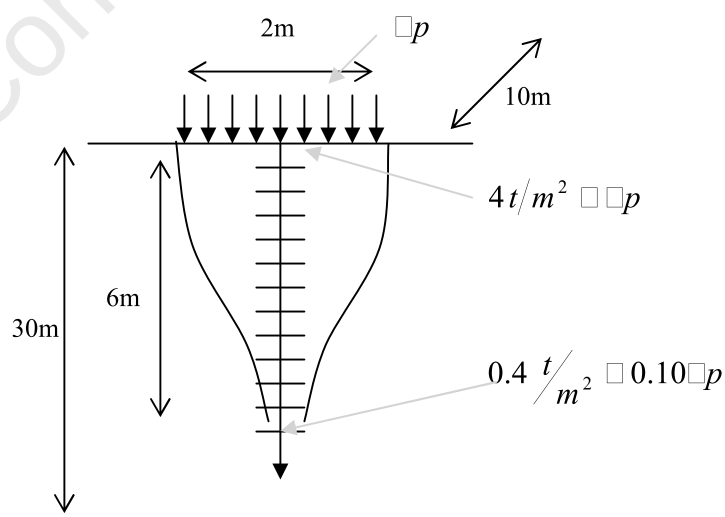
3. Se coloca el papel transparente sobre la carta de Newmark haciendo coincidir el centro común de los círculos con el punto correspondiente a la vertical en donde se quieren conocer los esfuerzos σ_z.
4. Se cuenta el número de celdas cubiertas por el dibujo que representa el área de apoyo del cimiento y se multiplica por el coeficiente de influencia correspondiente a cada una de las partes y por Δp.

Se concluye que con este método gráfico se requiere dibujar la planta del cimiento tantas veces como profundidades queramos fijar para conocer el esfuerzo σ_z. Se entiende que se puede dibujar una sola vez l aplanta del cimiento si se cuenta con un juego de cartas de Newmark en donde $\overline{AB}$ permita conservar la misma escala de líneas para las diferentes profundidades z seleccionadas.

Se supone que con lo anterior el alumno esta en la capacidad de determinar la distribución de esfuerzos σ_z en la masa de suelo sujeta a una sobrecarga Δp ejercida por una zapata de áreas de apoyo conocida.

Conocido el bulbo de presiones puede obtenerse la magnitud del hundimiento en forma mas próxima a la realidad, para ello se resuelve el siguiente problema:

Sea calcular la magnitud del hundimiento que experimenta un cimiento cuya área de apoyo es rectangular con ancho $b = 2m$ y $a = 10m$ aceptando que el m_v promedio del suelo es $m_v = 0.005\, m^2/ton$ y que el estrato de suelo en el que se apoya el cimiento es una arcilla de alta plasticidad CH (Clay-High) cuyo espesor es de 30m. Se pide calcular la magnitud del hundimiento al centro del cimiento. Se refiere al hundimiento total. $\Delta p = 4\ t/m^2$

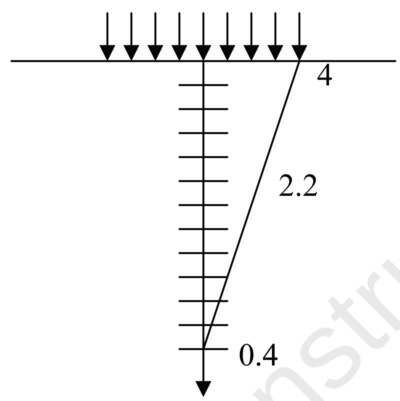


$$H = 3b$$
$$\Delta H_T = m_v \, \Delta p \, H$$
$$\Delta H_T = 0.005(4)(6)$$

Es importante mencionar que aun cuando se anoto $\Delta p = 4 \; {}^{t}\!/_{m^2}$ éste no es valor que debemos utilizar en le cálculo de la magnitud del hundimiento porque ya reconocimos que el esfuerzo normal vertical σ_z generado por la presencia de Δp va diminuyendo con la profundidad como se indica en la figura.

Hipótesis: se considera que la variación de σ_z con la profundidad es lineal pasando de $4 \; {}^{t}\!/_{m^2}$ para $z = 0$ a $0.4 \; {}^{t}\!/_{m^2}$ para $z = 6m$.

Como consecuencia con lo convenido el Δp que debemos utilizar en le cálculo es: 2.2



Sustituyendo resulta:

$$\Delta H_T = 0.005(2.2)(6)$$
$$\Delta H_T = 0.066m$$

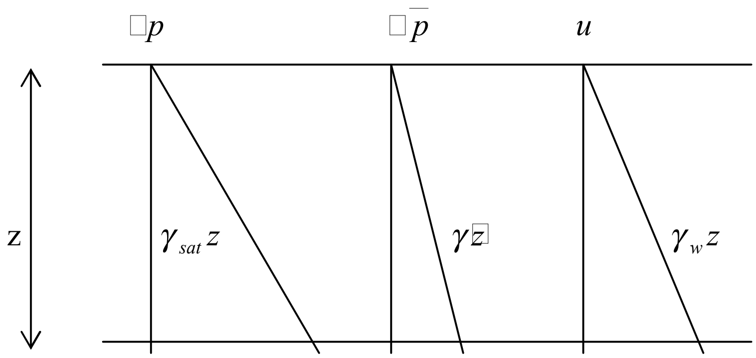
Como ya se anoto el m_v es el llamado módulo de compresibilidad, cuyo valor permite cuantificar la compresibilidad del suelo en el sentido de que al aumentar también lo hace la compresibilidad.

Su expresión es:

$$m_v = \frac{a_v}{1 + e_0} = \frac{\Delta e / \Delta p}{1 + e_0}$$

Para obtener su valor en primer lugar es necesario determinar a que profundidad z debe obtenerse, para ello se considera lo ya anotado.

Recordando

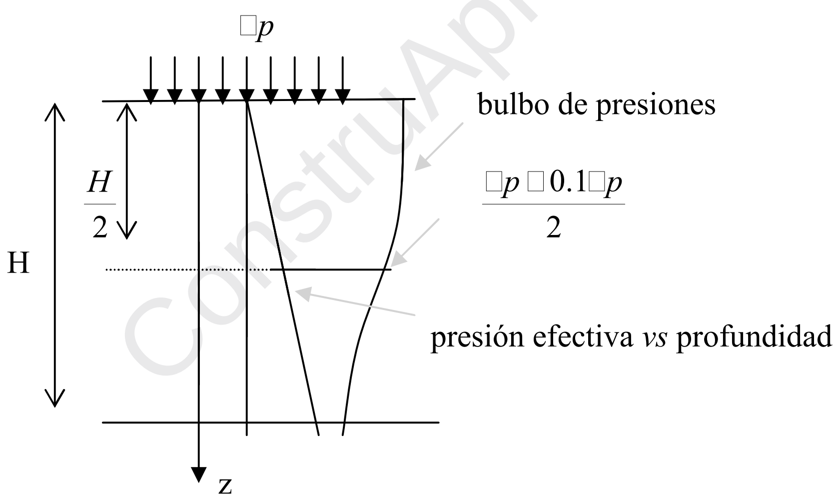


$\gamma' =$ *peso volumetrico sumergido*

$$\Delta \bar{p} = \Delta p - u$$

$$\gamma_{sat} z - \gamma_w z = \gamma' z$$

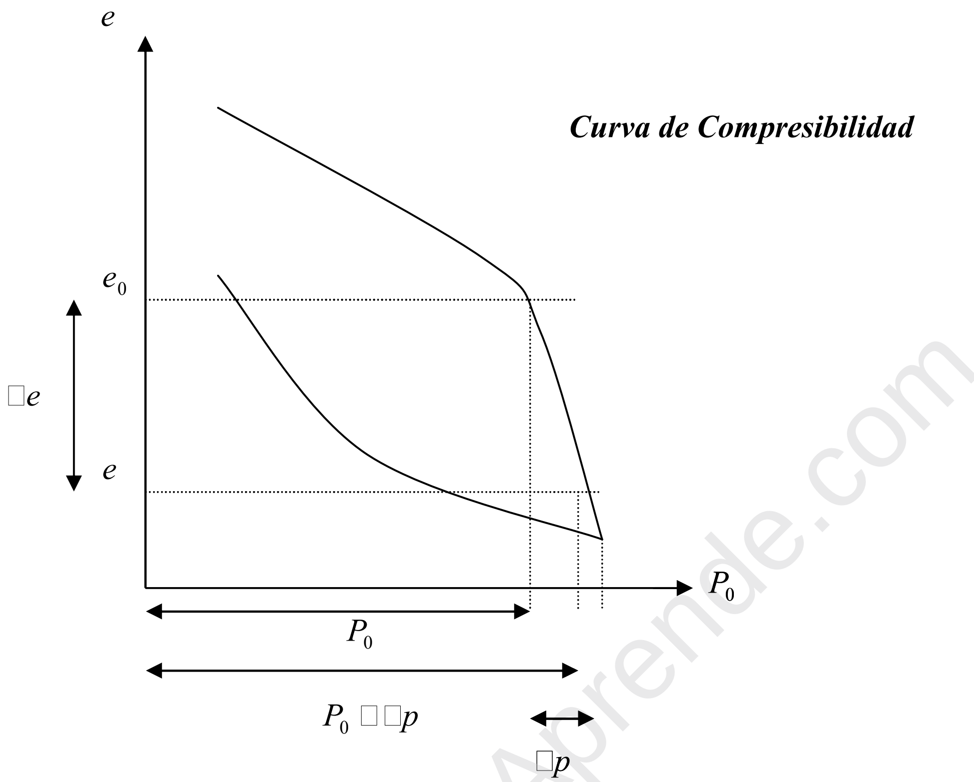
Tenemos como ejemplo:



La respuesta a la pregunta planteada (¿a que profundidad z se debe calcular m_v?), para el caso mostrado en la figura anterior se debe calcular la profundidad:

$$z = \frac{H}{2}$$

A esa profundidad se debe conocer la gráfica que muestre como varia e con p a la que usualmente se le denomina *curva de compresibilidad:*



Esto mismo para diferentes H_s (H_1, H_2, H_3) por lo que resulta:

$$\Delta_{H_T} = \Delta_{H_{T1}} + \Delta_{H_{2T}} + \Delta_{H_{3T}}$$

Esto se refiere al cálculo de hundimientos totales, es decir, la magnitud del hundimiento; pero hay que recordar que en la ingeniería además de la magnitud del hundimiento, se requiere conocer la rapidez con que se produce el hundimiento y para ello se ah introducido en la fórmula del hundimiento $\Delta\bar{p}$ que como sabemos es el esfuerzo efectivo que depende del tiempo, y de la profundidad z

$$\Delta H = m_v \cdot \Delta\bar{p} \cdot H$$

Finalmente se requiere calcular el hundimiento a distintos tiempos, ello lleva a conocer la rapidez con la que se genera la deformación anotada.

Como ya se escribió en la expresión que permite calcular la magnitud del hundimiento, se tiene la presencia del tiempo a través de la ecuación de $\Delta\bar{p}$, pues: $\Delta\bar{p} = f(t, z)$

De esta manera se puede calcular la magnitud del hundimiento para cada tiempo, pero ello implica calcular el m_v para ese tiempo, pues ha de recordarse que

$$m_v = \frac{\Delta e / \Delta \bar{p}}{1 + e_0}$$

De todo lo anterior se llega a la conclusión de que la teoría que se ha aplicado puede aproximarse a la realidad en función de la decisión del ingeniero que si así le conviene refinar su ingeniería teniendo en cuenta que ello va a implicar consumir mas tiempo y dinero.

También se puede decir que queda como una de las acciones a cometer el encontrar la ecuación que relacione la presión efectiva con la profundidad y con el tiempo. Desde luego que se puede y se debe encontrar esa relación , sin embargo ello implicaría que somos capaces de medir en las obras la presión efectiva, lo que resulta prácticamente difícil pero ello se puede facilitar si se recurre al conocimiento de la Ecuación Fundamental de los suelos Saturados:

$$\Delta p = u + \Delta \bar{p}$$

y determinamos $\Delta \bar{p}$ a diferentes tiempos, a través del conocimiento de la presión de poro a eso tiempos.

Por lo tanto tenemos: $\Delta H = m_v \cdot (\Delta p - u) \cdot H$

El problema se reduce a variar u con el tiempo t

Consolidación

Es un proceso mediante el cual el suelo experimenta deformación que ocurre al trascurrir tiempo, y en el cual los esfuerzos que originalmente son tomados por el agua del suelo se transfieren a los sólidos del mismo

Para encontrar u se sigue el camino de siempre, o sea, se considera lo que pasa por un elemento diferencial. Para plantear la ecuación diferencial es importante relacionarla con la deformación volumétrica.

Rapidez del cambio de volumen del elemento diferencial	=	*Gasto de salida del elemento diferencial*	-	*Gasto de entrada del elemento diferencial*

$$\frac{\partial dv}{dt} = \left(V_{salida} - V_{entrada}\right)1 \left(área\right)$$

aceptando Darcy: $v = k \cdot i$

$$\frac{\partial dv}{dt} = k_s i_s - k_e i_e \quad (1)$$

donde:

k_s es el coeficiente de permeabilidad a la salida del elemento diferencial
k_e es el coeficiente de permeabilidad a la entrada del elemento diferencial
i_s es el gradiente hidráulico a la salida del elemento diferencial
i_e es el gradiente hidráulico a la entrada del elemento diferencial

Hipótesis: se acepta que el suelo es homogéneo e isótropo respecto a k, por lo tanto:

$$k_s = k_e = k$$

Así se tiene:

$$\frac{\partial dv}{dt} = k i_s - k i_e \quad (1)$$

Pero:

$$i_s = \frac{1}{\gamma}\frac{\partial u}{\partial z} \quad (2)$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial dv}{dt} = k\frac{1}{\gamma}\frac{\partial u}{\partial z} - k\frac{1}{\gamma}\frac{\partial u}{\partial z}$$

Finalmente queda:

$$\partial dv = \frac{k}{\gamma}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz dt$$

Esta ecuación es la buscada pero antes de proceder a integrarla conviene relacionarla con la deformación del suelo en forma directa:

$$\frac{\text{Cambio de volumen del elemento diferencial}}{\text{Volumen original del elemento diferencial}} = \frac{\text{Cambio de volumen del modelo}}{\text{Volumen original del modelo}}$$

$$\frac{-dv}{dz \cdot 1} = \frac{de}{1+e_0}$$

por lo tanto:

$$-dv = \frac{de}{1+e_0}\,dz$$

haciendo aparecer la variación del esfuerzo efectivo que provoca el cambio de volumen, se tiene:

$$-dv = \frac{de/d\bar{p}}{1+e_0}\,d\bar{p}\,dz$$

$$-dv = m_v \left(d\bar{p}\right) dz$$

también sabemos que:

$$\mathrm{dp} = \mathrm{d\bar{p}} + \mathrm{du}$$
$$\mathrm{dp} = 0$$
$$\mathrm{d\bar{p}} = -\mathrm{du}$$
$$\mathrm{du} = \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{z}}\,\mathrm{dz} + \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{t}}\,\mathrm{dt}$$
$$\mathrm{d\bar{p}} = -\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{t}}\,\mathrm{dt}$$

Sustituyendo tenemos:

$$-dv = -m_v \left(-\frac{\partial u}{\partial t}\right) dtdz$$

$$m_v \frac{\partial u}{\partial t}\,dtdz = \frac{k}{\gamma}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\,dzdt$$

Finalmente:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{m_v \gamma}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}$$

Ecuación diferencial del proceso de consolidación del suelo debido a flujo de agua vertical

Al coeficiente $\frac{k}{m_v \gamma}$ se le acostumbra denominar C_V y se le llama *coeficiente de consolidación*, así se tiene:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C_V \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

El paso siguiente es integrar la ecuación de consolidación, para ello se elige uno de los casos mas comunes en la práctica profesional, que se trata de un estrato de arcilla entre dos estratos, uno superior y el otro inferior, de arena, así se obtienen las siguientes condiciones de frontera

para $\quad z = 0 \Rightarrow u = 0$

$\quad z = 2He \Rightarrow u = \Delta p \quad en \quad t = 0$

La integración conduce al siguiente resultado:

$$\frac{u}{\Delta p} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{4}{(2n+1)\pi} \, sen\left(\frac{(2n+1)\pi}{2} \frac{z}{He} \right) e^{-A} \right]$$

donde $$A = \frac{(2n+1)^2 \pi^2 k(1+e_0)}{4He^2 \gamma \, a_v} t$$

Se tiene la posibilidad de afectar t de manera que el termino en que aparezca sea también adimensional, para ello se propone que tal termino sea:

$$\frac{k(1+e_0)}{He^2 \gamma \, a_v} t$$

$$\frac{k}{He^2 \gamma \, m_v} t$$

$$\frac{C_V t}{He^2} = T \qquad \textit{factor tiempo}$$

Así la ecuación queda:

$$\frac{u}{\Delta p} = f\left(\frac{z}{He}, T\right)$$

Falta darle un toque práctico al resultado anterior, para ello se introduce el termino *grado de consolidación* que se indica con U

$U\%$ es el grado de consolidación a la profundidad z en al tiempo t

$$U\% = \frac{\Delta H_t}{\Delta H_{total}} \times 100$$

$$U\% = \left(1 - \frac{u}{\Delta p}\right) \times 100$$

U	**T**	**ΔH**	**T**
0	0	0	0
50	0.197	$\Delta H_{total}/2$	$\frac{0.197 He^2}{C_V}$
90	0.848		$\frac{0.848 He^2}{C_V}$
100	∞	100	

He es la máxima distancia recorrida por el agua del suelo al moverse por efecto de consolidación, es decir, por efecto de la sobrecarga impuesta.